Аттрактор-репеллер в пространстве контуров в задаче Стокса–Лейбензона для Хиле-Шоу течения

Александр ДЕМИДОВ [1,2] alexandre.demidov@mtu-net.ru
Жан-Пьер ЛОЭАК [3] Jean-Pierre.Loheac@math.cnrs.fr
Винсент РУНГЕ [1,3] runge.vincent@gmail.com
[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, [2] Московский физико-технический университет (МФТИ), [3] Ecole Cenrale de Lyon

Аннотация

Показано, что в пространстве контуров, точнее квазиконтуров, являющихся свободной границей в задаче Стокса-Лейбензона, имеется многообразие коразмерности 1, некоторые точки (т.е. контура) которого являются аттрактором в случае стока (и репеллером в случае источника), а другие точки, наоборот, являются репеллером в случае стока (и аттрактором в случае источника).

§ 1 Задача Стокса–Лейбензона. Теоремы о разрешимости. Возмущение окружности

1. Классическая постановка задачи Стокса–Лейбензона такова. Пусть Ω_0 — односвязная область в $\mathbb{R}^2$, ограниченная достаточно гладкой кривой Γ_0, окружающей начало координат $\{0\}$. Область Ω_0 соответствует пятну жидкости в некоторый начальный момент, а источник-сток этой жидкости локализован в начале координат $\{0\} \in \Omega_0$. Заданная область деформируется следующим образом: в момент t точка $\mathbf{s}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ границы Γ_t области Ω_t движется со скоростью $\dot{\mathbf{s}} = (\dot{x}, \dot{y})$, определяемой кинематическим условием

$$\dot{\mathbf{s}} = \nabla u \quad \text{на} \quad \Gamma_t, \tag{1}$$

где $\nabla u = (u_x, u_y)$ — градиент функции $u(t;\cdot,\cdot) : \Omega_t \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию Стокса [?]

$$u_{xx} + u_{yy} = q\delta(x,y) \quad \text{в} \quad \Omega_t \tag{2}$$

и динамическому условию Лейбензона [?]

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_t. \tag{3}$$

Здесь $\delta(x,y)$ — это δ-функция Дирака, сосредоточенная в начале координат, а ненулевой коэффициент $q \in \mathbb{R}$ характеризует мощность источника-стока. В дальнейшем, мы будем предполагать, что область Ω_t симметрична относительно оси x. С учетом этого удобно считать, что $q = 2$. При этом $t > 0$ будет соответствовать случаю источника, а $t < 0$ — случаю стока.

Отметим, вкратце, некоторые результаты исследований задачи (??)–(??). Они начались с работ Л.А. Галина [?] и П.Я. Кочиной [?, ?], опубликованных в 1945 г. В этих работах было выведено уравнение

$$2\pi \operatorname{Re}\big[\, \dot{f}(\zeta,t)\, \overline{\zeta f'(\zeta,t)}\,\big] = q, \qquad |\zeta| = 1 \tag{4}$$

для однолистного отображения $f(\cdot,t)$ единичного диска $\{\zeta \in \mathbb{C} \,\big|\, |\zeta| \le 1\ \}$ на искомую область Ω_t.

В предположении, что $f(\zeta,t) = a_1(t) + a_2(t)\zeta + \ldots + a_n(t)\zeta^n$, в [?] была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений на коэффициенты $a_j(t)$. В случае $n = 2$ эта система принимает вид [?]

$$a_1^2(t)a_2(t) = a_1^2(0)a_2(0), \qquad a_1^2(t) + 2a_2^2(t) = a_1^2(0) + 2a_2^2(0) - qt/\pi.$$

Если $|a_2/a_1| < 1/2$, то образ единичной окружности при отображении $f(\cdot,t)$ есть улитка Паскаля Γ_0 с полярным радиусом $\{r(\theta) = a\cos\theta + b,\ b > a\}$. В случае стока (т.е. при $qt < 0$) она за конечное время трансформируется в кардиоиду Γ_{t_*}, острие которой, как оказывается, не достигает точки стока. Далее (т.е. при $qt < qt_*$, когда $|a_2/a_1| > 1/2$), отображение $f(\cdot,t)$ перестает быть однолистным и решение $t \mapsto \Gamma_t$ прекращает свое существование. Аналогичный эффект для окружности, центр которой сдвинут относительно точки стока был установлен П.П. Куфаревым [?]. Спустя 24 года этот результат Куфарева получил С. Ричардсон [?], опираясь на доказанную им в [?] теорему о постоянстве комплексных моментов $M_n \stackrel{def}{=} \int_{\Omega_t} z^n\, \overline{dz} \wedge dz$ для $n \geq 1$. Первые теоремы о локальной разрешимости уравнения (**??**) были доказаны в работе [**?**].

В работах [**?**]–[**?**], [**?**] задача (**??**)–(**??**) интерпретировалась, как течение вязкой жидкости в срезе пористой среды. Последние десятилетия такого рода задачи довольно часто стали называть задачами о течении Хиле-Шоу, или просто задачей Хиле-Шоу со свободной границей[1]. Интерес к таким задачам особенно усилился за последние годы (см., в частности, [**?**]–[**?**] и цитируемую там литературу). Это вызвано не только использованием такого рода течений в инженерной практике, материаловедении, в процессах, связанных с ростом кристаллов (отметим в связи с этим работы [**?**]–[**?**]), но и тем, что эти задачи являются хорошими моделями (см., например, [**?**]–[**?**]) некоторых весьма сложных двухфазных задач. Поэтому исследование таких моделей позволяет в какой-то мере предугадать особенности главного члена асимптотики решения задач с фазовыми переходами (см., в частности, [**?**]).

2. Важным моментом в исследовании задачи (**??**)–(**??**) было осознание того неожиданного факта, что в случае стока ($qt < 0$) решение этой задачи не существует ни при каком сколько угодно малом t, если начальный контур Γ_0 не аналитичен хотя бы в одной точке. Другими словами, при таком начальном контуре сток невозможен: задача не имеет решения. Причина этого разъяснена ниже. А может ли такой (неаналитический) контур сдвинуться в случае источника? Ответ на этот вопрос был получен сравнительно недавно [**?**, **?**], где было доказано, что при малых временах решение задачи (**??**)–(**??**) в случае источника существует. На первый взгляд, все это удивительно, ибо закон движения контура Γ_0 априори никак не зависит ни от его аналитичности, ни от типа "двигателя": источник или сток. Внутренняя причина этих фактов ниже выявлена при рассмотрении эволюции гармоник слабого возмущения окружности.

Введем в $\Omega_t^+ = \Omega_t \cap \mathbb{R}^2_+$ функцию v, гармонически-сопряженную функции u. Запараметризуем точку $\mathbf{s}(t) \in \Gamma_t^+ = \Gamma_t \cap \mathbb{R}^2_+$ числом η, задающим ту линию уровня $\{(x,y) \in \Omega_t \mid v(t;x,y) = \eta\}$ функции v, которая содержит эту точку $\mathbf{s}(t)$. В силу симметрии Ω_t и выбранного (по этой причине) значения $q = 2$, параметр η меняется от нуля до единицы. Тем самым, определена непрерывная функция

$$s(t,\cdot) : [0,1] \ni \eta \mapsto s(t,\eta) = |s_0 s_\eta| \in [0, |\Gamma_t^+|\,],$$

где $|s_0 s_\eta|$ — длина дуги $\breve{s_0 s_\eta}$ кривой Γ_t^+, отсчитываемая в положительном направлении от точки s_0 пересечения кривой Γ_t^+ с положительной полуосью x до точки s_η пересечения этой кривой с линией уровня $\{v(t;x,y) = \eta\}$.

Определим (при каждом t) в замыкании полуполосы

$$\Pi = \big\{u + iv \in \mathbb{C} \;\big|\; -\infty < u < 0\,,\ 0 < v < 1\big\}$$

функцию Гельмгольца–Кирхгофа [**?**] формулой

$$A + iB : w = u + iv \mapsto A(t;u,v) + iB(t;u,v) = \ln\left|\frac{\partial z(t;w)}{\partial w}\right| + i \arg \frac{\partial z(t;w)}{\partial w}\,, \tag{5}$$

где $z = x + iy \in \Omega_t^+$. Имеем:

$$x(t,v) = x(t,0) - \int_0^v e^{a(t,\eta)} \sin b(t,\eta)\, d\eta, \qquad y(t,v) = \int_0^v e^{a(t,\eta)} \cos b(t,\eta)\, d\eta, \tag{6}$$

где $x(t,0) = \int_{-\infty}^0 e^{A(t;u,0)}\, du$, а

$$a(t,v) + ib(t,v) = A(t;0,v) + iB(t,0,v). \tag{7}$$

---

[1] Английский морской инженер Henri Hele-Shaw (1854–1941) был известен тем, что сконструировал пропеллер (гребной винт) с переменным шагом и так называемую ячейку Хиле-Шоу [**?**], позволяющую визуализировать линии тока плоского потенциального течения, например, при обтекании того или иного препятствия. Термин "течение Хиле-Шоу" впервые (хотя всего лишь один раз) был употреблен в публикации Б.У. Томсона [**?**], который приехал в Лондон из Мельбурна писать диссертацию по теме ячейки Хиле-Шоу. Спустя четыре года в работе С. Ричарсона [**?**] термин "течение Хиле-Шоу" впервые был вынесен в заглавие статьи. Парадокс в том, что главные пропагандисты этого термина отмечают в [**?**] "явную неуместность такого наименования".

В русской литературе существует разнобой в транскрипции фамилии Hele-Shaw. Мы следуем той, которой придерживалась П.Я. Кочина [**?**] и которая соответствует рекомендации проф. S. Howison, любезно присланной им первому автору этой статьи.

Отметим, что поскольку

$$|\nabla u|\Big|_{s=s(t,v)\in\Gamma_t} = e^{-a(t,v)},$$

то кинетическое условие (**??**) можно записать в виде

$$e^{-a} = \dot{x}\cos b + \dot{y}\sin b. \tag{8}$$

Таким образом, задача (**??**)–(**??**) может быть переформулирована в терминах функций a и b. А именно [**?**], задача (**??**)–(**??**) эквивалентна задаче Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\dot{b}(t,v) = e^{-2a}a' + b'e^{-a}\int_0^v \left[e^a\dot{a} - e^{-a}b'\right]\,d\xi\,, \qquad \dot{b} \overset{def}{=} \frac{\partial b}{\partial t}\,, \quad b' \overset{def}{=} \frac{\partial b}{\partial v}\,, \tag{9}$$

относительно функций a и b, связанных между собой (при каждом t) преобразованием Гильберта: согласно (**??**), функции a и b являются следом при $u=0$ гармонически-сопряженных в полуполосе Q функций A и B. По-существу, именно это обстоятельство является препятствием для существования решения в случае стока при отсутствии аналитичности кривой Γ_0 хотя бы в одной точке. Дело в том, что уравнение (**??**) жестко связывает возможность эволюции функции $t\to b(t,v)$, т.е. эволюции угла наклона касательной к Γ_t в точке $s_v\in\Gamma_t$, с эволюцией *коэффициента продольной деформации* $\exp a(t,v)$ контура в этой точке. В случае стока (т.е. при $t<0$), когда контур “съеживается”, продольная деформация контура в точке $s_v\in\Gamma_0$, определяемая уравнением (**??**), оказывается невозможной, если в этой точке контур Γ_0 не аналитичен. Уравнение (**??**) в этом случае (при любом сколь угодно малом $-t>0$) неразрешимо по причине, вскрытой в теореме **??** и связанной с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье аналитической функции на окружности.

3. Заметим, что $B(t,u,v)\equiv\pi v$ если (и только если) кривая Γ является окружностью $\{z\in\mathbb{C}\;\big|\;|z|=R_0>0\}$, центр которой совпадает с началом координат (т.е. носителем δ-функции в уравнении (**??**)). Учитывая это, представим функцию b в виде

$$b(t,v) = \pi v + \beta(t,v)$$

Заметим, что $\beta(t,0)=\beta(t,1)=0$ (в силу симметрии и дифференцируемости кривой Γ), и разложим функцию $\beta(t,\cdot):[0,1]\ni v\mapsto\beta(t,v)$ в ряд Фурье

$$\beta(t,v) = \sum_{k\geq 1}\beta_k(t)\sin\pi kv$$

по ортобазису $e_k:[0,1]\ni v\mapsto\sin\pi kv,\ \ k\in\mathbb{N},$ пространства $L^2(0,1)$.

Легко видеть, что те же коэффициенты Фурье $\beta_k(t)$ определяют и функцию $\alpha_0(t)$, задаваемую равенством

$$A(t;u,v) = \alpha_0(t) + \pi u + \sum_{k\geq 1}\beta_k(t)e^{\pi ku}\cos\pi kv.$$

что, ясное дело, можно выразить и таким равенством:

$$a(t,v) = \alpha_0(t) + \alpha(t,v), \qquad \text{где} \quad \alpha(t,v) = \sum_{k\geq 1}\beta_k(t)\cos\pi kv.$$

Действительно, приращение площади $|\Omega_t| = 2|\Omega_t^+|$ области Ω_t за единицу времени равно

$$\int_\Gamma \dot{\mathbf{s}}\,d\Gamma \overset{(??)}{=} \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma\,,$$

т.е. коэффициенту при δ-функции в уравнении (**??**). Другими словами,

$$\frac{d}{dt}|\Omega_t^+| = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad |\Omega_t^+| = t + t_0, \qquad \text{где} \quad t_0 = |\Omega_0^+|. \tag{10}$$

В терминах функции Гельмгольца–Кирхгофа это условие принимает вид

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\int_{-\infty}^0 e^{2A(t;u,v)}\,du\right)\,dv = 1\,,$$

поскольку якобиан отображения $w \mapsto e^{A+iB}$ равен $|\partial z/\partial w| \overset{(??)}{=} e^{2A}$. Отсюда следует, что коэффициент $e^{a(t,v)}$ продольной деформации контура Γ определяется из уравнения (**??**). Поэтому он, а потому и функция $\alpha_0(t)$, зависят от $|\Omega_0|$ и коэффициентов Фурье $\beta_k(t)$. Таким образом, искомая деформация начальной кривой Γ_0, определяемая задачей Коши для уравнения (**??**), полностью характеризуется эволюцией коэффициентов Фурье $\beta_k(\cdot)$ в разложении $\beta(t,v) = \sum_{k\geq 1} \beta_k(t) \sin \pi k v$.

Теорема 1.1 [?] *Уравнение* (**??**) *представимо в виде*

$$\dot\beta - \mathbf{K}(\beta)\dot\beta = \frac{1}{2(t+t_0)}\,\mathbf{F}(\beta). \tag{11}$$

Здесь $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1,\ \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1$, *где*

$$[\,\mathbf{K}_0(\beta)\dot\beta\,]\,(t,v) = b'(t,v)\,e^{-\alpha(t,v)} \int_0^v e^{\alpha(t,\eta)}\,\dot\alpha(t,\eta)\,d\eta\,,$$

$$[\mathbf{K}_1(\beta)\dot\beta](t,v) = \left(\sum_{j\geq 1} \frac{2\beta_j\dot\beta_j}{j+1}\right) \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \pi k v + [\mathbf{r}_1(\beta)\dot\beta](t,v),$$

$$[\mathbf{F}_0(\beta)](t,v) = \frac{1}{\pi}\left\{ e^{-2\alpha}\alpha' - b'e^{-\alpha}\int_0^v e^{-\alpha} b'\,d\eta + \pi b' e^{-\alpha}\int_0^v e^{\alpha}\,d\eta \right\},$$

$$[\mathbf{F}_1(\beta)](t,v) = \left(\sum_{j\geq 1} \frac{2\beta_j^2}{j+1}\right) \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \pi k v + [\mathbf{s}_1(\beta)](t,v).$$

При этом,

$$|\mathbf{r}_1(\beta)\dot\beta| \leq C\|\beta\|_1^2\|\beta\|_0, \qquad |\mathbf{s}_1(\beta)| \leq C\|\beta\|_1^3\,,$$

где

$$\|\beta\|_1 = \max_t \sqrt{\sum_{k\geq 1}\Big(k\beta_k(t)\Big)^2}, \qquad \|\dot\beta\|_0 = \max_t \sqrt{\sum_{k\geq 1}\Big(\dot\beta_k(t)\Big)^2}.$$

Покоординатно динамическая система (**??**) *выглядит так:*

$$\begin{aligned} 2(t+t_0)\Big(\beta_1\dot\beta_1 + r_1(\beta)\dot\beta\Big) &= \Big(-\beta_1^2 + 2\textstyle\sum_{j\geq 2}\beta_j^2\Big) + s_1(\beta)\,, \\ 2(t+t_0)\Big(\dot\beta_k + r_k(\beta)\dot\beta\Big) &= -(k+2)\beta_k + s_k(\beta) \qquad \textit{для} \quad k \geq 2\,, \end{aligned}$$

где

$$|r_k(\beta)\dot\beta| \leq C\|\beta\|_1^{1+\operatorname{sgn}|k-1|}\|\dot\beta\|_0\,, \qquad |s_k(\beta)| \leq C\|\beta\|_1^{2+\operatorname{sgn}|k-1|}\,.$$

Из теоремы **??** с помощью кропотливых функционально-геометрических построений может быть выведена

Теорема 1.2 [?]–[?] *Если начальный контур Γ_0 есть малое (определяемое формулами* (**??**)*) возмущение окружности радиуса $R(0)$, то в случае источника его эволюция Γ_t продолжается бесконечно долго и она единственна на любом временном интервале. Что же касается отклонения Γ_t от окружности радиуса $R(t) = \sqrt{R^2(0) + 2t/\pi}$, то, начиная с некоторого момента, оно почти монотонно стремится к нулю.*

Точнее, существует число $\rho \in (0, 1/8)$, такое, что для любого $\mu \in (0,1)$ функция

$$[0,1] \ni v \mapsto b(t,v) = \pi v + \beta(t,v), \qquad \textit{где} \quad \beta(t,v) = \sum_{n\geq 1}\beta_n(t)\sin\pi n v, \tag{12}$$

определяющая контур Γ_t, существует при любом $t > 0$, если только начальная угловая функция, задающая контур Γ_0, т.е. функция

$$[0,1] \ni v \mapsto b(0,v) = \pi v + \sum_{n\geq 1}\beta_n^0 \sin \pi n v, \tag{13}$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{k\geq 2}(k\beta_k^0)^2 \leq (\mu\rho)^{1/2}|\beta_1^0|^{3/2}, \quad 0<|\beta_1^0|\leq \mu\rho.$$

При этом

$$\left|\dot\beta_1(0)-\dot{\overline{\beta}}_1(0)\right|\leq \mu, \quad \sqrt{\sum_{k\geq 2}\left|\dot\beta_k(0)-\dot{\overline{\beta}}_k(0)\right|^2}\leq \mu,$$

где

$$\overline{\beta}_1{}^2(t)=\frac{1}{t+t_0}\left(t_0\beta_1^2(0)+2\sum_{k\geq 2}\beta_k^2(0)\int_0^t\frac{d\tau}{(1+\tau/t_0)^{k+2}}\right), \tag{14}$$

$$\overline{\beta}_k(t)=\frac{\beta_k(0)}{(1+t/t_0)^{k/2+1}}. \tag{15}$$

Кроме того, существует константа C (немного превосходящая единицу), такая, что при любом $t\geq 0$ справедливы оценки

$$\left|\dot\beta_1(t)-\dot{\overline{\beta}}_1(t)\right|\leq C\mu, \quad \sqrt{\sum_{k\geq 2}\left|\dot\beta_k(t)-\dot{\overline{\beta}}_k(t)\right|^2}\leq C\mu.$$

Рис. 1. Векторное поле $(\dot{\overline{\beta}}_1,\dot{\overline{\beta}}_k)$ для случая $\beta_j(0)=0$ при $j\neq 1$ и $j\neq k$.

Замечание 1.1 *Формулы* (**??**) *объясняют природу отмеченного выше результата: если в случае $qt<0$, т.е. стока(!) задача* (**??**)–(**??**) *разрешима при любом сколь угодно малом t (в нашем случае $q=2>0$ это означает, что речь идет о любом малом отрицательном t), то начальный контур Γ_0 необходимо аналитичен. Действительно, в силу* (**??**), *функция* (**??**) *будет определена при сколь угодно малом $t<0$ лишь тогда, когда коэффициенты Фурье $\beta_k^0=\beta_k(0)$ функции* (**??**) *экспоненциально быстро убывают и определяют, тем самым (см., например, § 12 книги [?]), аналитическую функцию.*

Отметим также, что последнее утверждение (о бесконечном по времени "дрейфе" возмущенной окружности; ср. с [?]) согласуется с таким фактом: если при деформации $t\mapsto\Gamma_t$ кривая Γ_{t*} при некотором конечном $t_*\neq 0$ гомотетична окружности с центром в начале координат $\{0\}$, т.е. там, где локализован источник-сток, то кривая Γ_0, а потому и все кривые Γ_t гомотетичны той же самой окружности.

§ 2 Квазиконтурная модель. Критическое многообразие. Аттрактор-репеллер

Теорема **??** проясняет эволюцию слабых возмущений окружности (частично представленную на Рис. 1). В случае произвольного начального контура уравнение (**??**) изучалось в рамках аппроксимационной так называемой квазиконтурной [?]–[?] (ранее именовавшейся полигональной [?], конечноточечной [?]) модели задачи (**??**)–(**??**).

1. Квазиконтурная модель задачи (**??**)–(**??**) отличается от самой этой задачи лишь в следующем.

Во-первых, класс гладких кривых Γ_t заменен на класс *квазиконтуров*. Ими являются полигональные контура Γ_t^m, ограничивающие полигональные области Ω_t^m, симметричные (как и области Ω_t) относительно оси Ox. Ординаты вершин $s_0,s_{\pm1},\ldots,s_{\pm m}$ квазиконтура Γ_t^m имеют знак своего индекса, в частности, вершина s_0 лежит на положительной полуоси Ox. Эти вершины образуют $2m+1$ его сторон

$$[s_0,s_{\pm1}],\ [s_{\pm1},s_{\pm2}],\ \ldots,\ [s_{\pm(m-1)},\ s_{\pm m}],\ [s_m,s_{-m}].$$

Во-вторых, эволюция этих сторон определяется движением вершин квазиконтура Γ_t^m, согласно нижеприведенному условию (**??**) (наследующему условие Стокса (**??**) и динамическое условие Лейбензона (**??**)), а также условию (**??**) (наследующему кинематическое условие (**??**)).

Введем вектор-функцию

$$\mathbf{N} : t \mapsto \mathbf{N}(t) = (N_1(t), \ldots, N_m(t))$$

и вектор $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, в терминах которых будем задавать квазиконтур Γ_t^m. Здесь и ниже через $N_j(t)$ обозначен угол наклона к оси Ox внешней нормали к j-ой стороне $[s_{j-1}, s_j]$ квазиконтура Γ_t^m. При этом, для[2] $j = 1, \ldots, m$

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} < N_1 < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ -\pi < N_k - N_{k-1} < \pi\,, \quad \forall k \in \{2, \ldots, m\}\,, \\ 0 < N_m < 2\pi\,. \end{cases}$$

Далее, параметр $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ однозначно определяется по начальному контуру Γ_0^m через решение задачи

$$u_{xx} + u_{yy} = 2\delta(x, y) \quad \text{в} \quad \Omega_t^m\,, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_t^m \tag{16}$$

при $t = 0$ и задает посредством формул (**??**) длины сторон квазиконтура Γ_t^m. А именно, σ_k есть то значение функции v, гармонически сопряженной в $\Omega_t^m \cap \mathbb{R}_+^2$ к функции u, при котором k-ая вершина $s_k \in \Gamma_t^m$ принадлежит линии уровня $\{(x, y) \in \Omega_t^m \mid v(x, y) = \sigma_k\}$. Очевидно, что

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_m < \sigma_{m+1} = 1\,,$$

а координаты (x_k, y_k) вершины s_k (для $k = 1, \ldots, m$) определяются в соответствии с (**??**) по формулам:

$$x_k = x_0 - \int_0^{\sigma_k} e^a \sin b\, dv, \qquad y_k = \int_0^{\sigma_k} e^a \cos b\, dv\,, \tag{17}$$

где $x_0 = \int_{-\infty}^0 e^{A(t;u,0)}\, du$, $a(t, v) + ib(t, v) = A(t; 0, v) + iB(t, 0, v)$, а функция Гельмгольца–Кирхгофа

$$A + iB : w = u + iv \mapsto A(t; u, v) + iB(t; u, v) = \ln\left|\frac{\partial z(t; w)}{\partial w}\right| + i \arg \frac{\partial z(t; w)}{\partial w}\,,$$

соответствует для $z = x + iy \in \Omega_t^m \cap \mathbb{C}_+$ (ср. с (**??**)) решению $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$ задачи (**??**).

Что касается кинематического условия для квазиконтура Γ_t^m, то (учитывая (**??**) $\Leftrightarrow$ (**??**)) зададим его формулой

$$R_k = \dot{x}_k \cos b_k + \dot{y}_k \sin b_k, \qquad k = 0, \ldots, m, \tag{18}$$

где $b_k = b(t, \sigma_k)$, а R_k — это "нормальная" скорость точки $s_k \in \Gamma_t^m$, точнее, алгебраическое значение проекции скорости точки $s_k \in \Gamma_t^m$ на внешнюю "нормаль" к Γ_t^m, которая есть биссектриса внешнего угла при вершине s_k полигона Γ_t^m. Полагая $N_0 \stackrel{\text{def}}{=} -N_1$, заметим, что

$$b_0 = 0, \quad b_k = \frac{N_k + N_{k+1}}{2}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m\,.$$

Отметим очевидное

Предложение 2.1 *Квазиконтур Γ_0 есть правильный (2m+1)-многоугольник, а источник-сток находится в его центре, если и только если $(\mathbf{N}, \boldsymbol{\sigma}) = (\hat{\mathbf{N}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \stackrel{def}{=} (\widehat{N}_1, \ldots, \widehat{N}_m; \widehat{\sigma}_1, \ldots, \widehat{\sigma}_m)$, где*

$$2\hat{N}_1 = \hat{N}_2 - \hat{N}_1 = \cdots = \hat{N}_{m+1} - \hat{N}_m = \frac{2\pi}{2m+1},$$

а

$$\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2 - \hat{\sigma}_1 = \cdots = \hat{\sigma}_m - \hat{\sigma}_{m-1} = \frac{2}{2m+1}\,.$$

Cher Jean-Pierre, insere ici, s'il te plait la figure 3 a la page 6 de H-S.pdf ou a la page 9 de SLHS (example of upper part of a centered regular pentagonal domain). En russe: Рис. 1. Верхняя часть правильного пятиугольного

[2]Угол наклона внешней нормали к другим сторонам квазиконтура определяется из условия его симметрии относительно оси Ox. В частности, угол наклона к $(m+1)$-стороне $[s_m, s_{-m}]$ равен π.

квазиконтура Γ_t^5, в центре которого источник или сток.

Je mets tout de suite la formulation du Theorem 4.1 (voir la page 17 de SLHS.pdf) $\approx$ Theorem 3.1 (voir la page 13 de H-S.pdf). Je dois noter que dans H-S.pdf (la variante de 24/06.2012 m'envoye le 01/12.2012) β_0 n'est pas definie en (9), bien que ceci ecrit a la page 11 (2-eme ligne en bas). D'autre part, dans SLHS.pdf (que tu m'a passe avant, precisement le 24/11.2012) tout est bien: tu note ce terme par α_0. Je propose ci-dessous une variante de la formulation de ce theorem (voir Th. 2.1) un preuve duquel a ete fait en principe (si je me souviens bien) dans [?]. C'est juste? J'attends tes corrections.

Согласно сказанному выше, квазиконтур Γ_t^m однозначно задается параметром $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\Gamma_0^m)$ и вектор-функцией $\mathbf{N} : t \mapsto \mathbf{N}(t)$.

Теорема 2.1 [?] *Вектор-функция* $\mathbf{N} : t \mapsto \mathbf{N}(t) = (N_1(t), \dots, N_m(t))$ *является решением матричного уравнения*

$$Q(\mathbf{N}, \boldsymbol{\sigma})\dot{\mathbf{N}} = \exp(-2\alpha_0)\, P^0(\mathbf{N}, \boldsymbol{\sigma}) + \dot{\alpha}_0\, P^1(\mathbf{N}, \boldsymbol{\sigma}) .$$

Здесь

$$e^{-2\alpha_0(t)} = (t + |\Omega_0^+|) \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^0 e^{2\left(\pi u + \sum\limits_{k\geq 1} \beta_k(t) e^{\pi k u} \cos \pi k v\right)} du \right) dv ,$$

$$\beta_k(t) = \frac{2}{k} \left(N_1(t) + \sum_{j=1}^m \frac{N_{j+1}(t) - N_j(t)}{\pi} \cos k\pi\sigma_j \right) ,$$

а элементы матриц $Q = (q_{kj})_{1\leq k,j \leq m}$, $P^0 = (p_k^0)_{1\leq k\leq m}$ *и* $P^1 = (p_k^1)_{1\leq k \leq m}$ *представлены формулами*

$$q_{kj} = \frac{1}{\pi} \left[\tan \frac{N_k - N_{k-1}}{2} \int_0^{\sigma_{k-1}} \frac{\ln f_j(\eta)}{g(\mathbf{N}, \eta)}\, d\eta + \tan \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \int_0^{\sigma_k} \frac{\ln f_j(\eta)}{g(\mathbf{N}, \eta)}\, d\eta \right] + \delta_{kj} \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N}, \eta)} ,$$

$$\begin{aligned} p_k^0(\mathbf{N}) =& d_{k-1}(\mathbf{N}) \cos \frac{N_k - N_{k-1}}{2} - d_k(\mathbf{N}) \cos \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \\ &+ (\delta_{k1} - 1)\, \tan \frac{N_k - N_{k-1}}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \left[d_{j-1}(\mathbf{N}) \sin \frac{N_j - N_{j-1}}{2} + d_j(\mathbf{N}) \sin \frac{N_{j+1} - N_j}{2} \right] \\ &- \tan \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \sum_{j=1}^{k} \left[d_{j-1}(\mathbf{N}) \sin \frac{N_j - N_{j-1}}{2} + d_j(\mathbf{N}) \sin \frac{N_{j+1} - N_j}{2} \right] , \end{aligned}$$

$$p_k^1(\mathbf{N}) = \tan \frac{N_k - N_{k-1}}{2} \int_0^{\sigma_{k-1}} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N}, \eta)} + \tan \frac{N_{k+1} - N_k}{2} \int_0^{\sigma_k} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N}, \eta)} ,$$

в которых δ_{kj} *есть символ Кронекера,*

$$f_j(\eta) = \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2}(\eta + \sigma_{j-1})\, \sin \frac{\pi}{2}(\eta - \sigma_{j-1})}{\sin \frac{\pi}{2}(\eta + \sigma_j)\, \sin \frac{\pi}{2}(\eta - \sigma_j)} \right| \quad \textit{для} \quad 1 \leq j \leq m ,$$

$$f_{m+1}(\eta) = 2 \left| \sin \frac{\pi}{2}(\eta + \sigma_m)\, \sin \frac{\pi}{2}(\eta - \sigma_m) \right| ,$$

$$g(\mathbf{N}, \eta) = 2 \prod_{k=1}^{m+1} f_k(\eta)^{N_k/\pi} \qquad d_k(\mathbf{N}) = \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} g(\mathbf{N}, \eta)\, d\eta ,$$

а

$$\lambda_k = \frac{\sigma_{k-1} + \sigma_k}{2} \quad \textit{для} \quad 1 \leq k \leq m , \quad \lambda_0 = -\lambda_1 , \quad \lambda_{m+1} = 1 .$$

2. Численный анализ [?]–[?] показал, что в пространстве $\mathfrak{N}_m(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma})$ квазиконтуров Γ_t^m имеется многообразие коразмерности 1

$$\mathfrak{M}_m(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma}) = \{(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma}) \in \mathfrak{N}_m(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma}) \mid \det Q(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma}) = 0\},$$

которое в работе [?] названо *критическим*, поскольку оно связано с вырождением матрицы $Q(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma})$, соответствующей оператору $\mathbf{I} - \mathbf{K}(\beta)$, фигурирующему в формуле (**??**).

Jean-Pierre, insere ici, s'il te plait La figure "1" (Fig.1 en toVishik2.pdf que tu m'a envoye le 30.11 avec le sujet "figures") qui donne la forme de la sous-variete dans les cas m=2 (contenant le cas du pentagone regulier centre sur la source-puits) et m=3 (contenant l'heptagone regulier centre sur la source-puits). En russe:

Рис. 2. Критические многообразия $\mathfrak{M}_2(\mathbf{N},\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$ и $\mathfrak{M}_3(\mathbf{N},\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$, соответственно, в пространствах $\mathfrak{N}_2(\mathbf{N},\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$ и $\mathfrak{N}_3(\mathbf{N},\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$.

Представленные ниже на рисунках 3 и 4 результаты численных расчетов, включая графики

$$t \mapsto detQ(t) \qquad \text{и} \qquad t \mapsto \ln\rho(t)\,,$$

где ρ есть максимально возможное отношение расстояний двух точек квазиконтура от источника-стока, показывают, что правильные квазиконтуры $\Gamma_t^5 \in \mathfrak{M}_5(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma})$ и $\Gamma_t^7 \in \mathfrak{M}_7(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma})$, в центре которых расположен источник-сток, являются аттрактором в случае источника (и репеллером в случае стока). Такой же вывод в отношении окружности (являющейся правильным квазиконтуром с бесконечным числом сторон), в центре которой расположен источник-сток, дает теорема **??**, проиллюстрированная на рис. 1.

Jean-Pierre, insere ici, s'il te plait les figures "2" et "3" (Fig.2 et Fig.3 en toVishik2.pdf m'envoie le 30.11 avec le sujet "figures") qui montrent l'attractivite des points de la variete correspondant aux polygones reguliers centres sur le point source (cas source). En russe:

Рис. 3. Эволюция в правильный квазиконтур Γ_t^5 с центрированным источником слабо возмущенного квазиконтура, для которого

$$0 < N_1^0 - \frac{1}{5}\pi \ll 1,\ 0 < N_2^0 - \frac{3}{5}\pi \ll 1,\ \det Q(\mathbf{N}^0) < 0\,.$$

Рис. 4. Эволюция в (сплайн-интерполяционный) правильный квазиконтур Γ_t^7 с центрированным источником слабо возмущенного квазиконтура.

Что же касается эволюции малых возмущений других точек критического многообразия, то для тех точек $\mathfrak{M}_m(\mathbf{N},\sigma)$ (т.е. квазиконтуров), для которых были проведены численные эксперименты, оказалось, что они, напротив, являются аттракторами в случае стока (и, тем самым, репеллерами в случае источника). В частности, на рисунках 5 и 6 представлены подтверждающие этот факт результаты, а именно, данные об эволюции в случае стока децентрированной "окружности" (т.е. правильного децентрированного квазиконтура Γ_t^8). Заметим, что представленные на этих рисунках данные об эволюции в случае стока децентрированной "окружности" полностью соответствуют упомянутому в начале статьи результату П.П. Куфаревым [?].

Jean-Pierre, insere ici, s'il te plait les figures "4" et "5" (Fig.4 et Fig.5 en toVishik2.pdf m'envoie le 30.11 avec le sujet "figures") qui montrent l'attractivite des points de la variete correspondant aux polygones reguliers centres sur le point source (cas source). En russe:

Рис. 5. Три стадии эволюции в случае стока децентрированной “окружности” Куфарева (децентрированного квазиконтура Γ_t^8).

Рис. 6. Эволюция в случае стока децентрированной “окружности” Куфарева (децентрированного сплайн-интерполяционного квазиконтура Γ_t^8).

Работа частично поддержена C.N.R.S (проект “EDC25172”), регионом Рона-Альпы (проект “CIBLE 2010”) и РФФИ (проект 13-01-*****).

§ Список литературы

[1] G.G. Stokes (1898) Mathematical Proof of the Identily of the Stream-Lines obtained by means of Viscous Film with those of a Perfecy Fluid moving in Two Dimensions. *Brit. Ass. Rep.* 143 (Papers, V, 278).

[2] Л.С. Лейбензон (1934) *Нефтепромысловая механика.* Часть II, Нефтеиздат, Москва.

[3] Л.А. Галин (1945) Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. *ДАН СССР*, Т. 47, № 4, 250–253.

[4] П.Я. Полубаринова-Кочина (1945) К вопросу о перемещении контура нефтеносности. *Доклады АН СССР*, Т. 47, № 4, 254–257.

[5] П.Я. Полубаринова-Кочина (1945) О неустановившихся движениях в теории фильтрации: О перемещении контура нефтеносности. *Прикл. Матем. и Мех.*, Т. 9, вып. 1, 79–90.

[6] П.П. Куфарев (1948) Решение задачи о контуре нефтеносности для круга. *ДАН СССР*, Т. 60, №8, 1333-1334.

[7] S. Richardson (1972) Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel. *J. Fluid Mech.* **56**, 609–618.

[8] Ю.П. Виноградов, П.П. Куфарев (1948) Об одной задаче фильтрации. *Прикл. Матем. Мех.*, Т. 12, № 2, 181–198.

[9] H.S. Hele-Shaw (1898) The flow of water *Nature*, **58**, No. 1489, 34–36.

[10] B.W. Thompson (1968) Secondary flow in a Hele-Shaw celle. J. Fluid Mech. **31**, Part 2, 379-395.

[11] П.Я. Кочина /П.Я. Полубаринова-Кочина/ (1991). *Избранные труды. Гидродинамика и теория фильтрации.* “Наука”, Москва.

[12] Дж.Р. Окендон, С.Д. Ховисон (2002) Кочина и Хеле-Шоу в современной математике, естественных науках и технике. *Прикл. Мат. и Механика*, Т. 66, вып. 3, 515–524.

[13] B. Gustafsson (1985) Applications of variational inequalities to a moving boundary problem for Hele-Shaw flows. *SIAM J. Math. Analysis* **16**, 279–300.

[14] B. Gustafsson, A. Vasil'ev (2004) *Conformal and Potential Analysis in Hele-Shaw cells*, Stockholm-Valparaíso.

[15] S.D. Howison, J.R. Ockendon (1999) Papers from the conference held in Oxford. *Euro. J. of Applied Mathematics*, **10**, 511–709.

[16] A.M. Meirmanov, B. Zaltzman (2002) Global in time solution to the Hele-Shaw problem with a change of topology. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*, **13**, 431–447.

[17] Л.Н. Александров (1985) *Кинетика кристализации и перекристализации полупроводниковых пленок.* "Наука", Новосибирск.

[18] Е.Н. Каблов (2001) *Литые лопатки газотурбинных двигателей.* "МИСИС", Москва.

[19] B.G.Thomas, Ch.Beckermann (1998) *Modeling of casting, welding advanced solidification processes* San Diego, California.

[20] П.И. Плотников, В.Н. Старовойтов (1993) Задача Стефана, как предел системы фазового поля. *Дифф. уравнения*, Т. 29, № 3, 461–471.

[21] G. Caginalp (1989) Stefan and Hele-Shaw type problems as asymptotics limits of the phase field equations. *Physics Review A* **39**, No. 11, 5887–5896.

[22] G. Caginalp, X. Chen (2000) Convergence of the phase field model to its sharp interface limits. *Eur. J. Appl. Math.* **12**, 20–42.

[23] В.Г. Данилов, Г.А. Омельянов, Е.В. Радкевич (1995) Асимптотическое решение системы фазового поля и модефицированная задача Стефана. *Дифф. уравнения* Т. 31, № 3, С. 483–491.

[24] J. Escher, G. Simonett (1997) Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw models. *SIAM J. Math. Anal.*, **28**, No. 5, 1028–1047.

[25] G. Prokert (1999) On evalution equations for moving domains. *Z. Anal. Anwend.* **18**:1, 67–95.

[26] A.S. Demidov, "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций" *Usp. Mat. Nauk* **65** (1), 3–96 (2010).

[27] A.S. Demidov (2004) Evolution of a perturbation of a circle in a problem for Hele-Shaw flows. *Journ. of Math. Sciences*, **123**, No. 8, 4381–4403 (http://www.wkap.nl/journalhome.htm/1072-3374).

[28] A.S. Demidov (2006) Evolution of a perturbation of a circle in a problem for Hele-Shaw flows. Part II. *Journ. of Math. Sciences*, **139**, No. 6, 7064–7078.

[29] А.С. Демидов (2002) Об эволюции слабого возмущения окружности в задаче о течении Хил-Шоу. *Успехи Матем. Наук*, Т. 57, № 6, 177–178.

[30] В.И. Арнольд (2000) *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, 2-ое изд. Удмурд. гос. унив-т.

[31] A. Antontsev, A.M. Meirmanov, V. Yurinsky (1999) Hele-Shaw flow in two dimensions: Global-in-time classical solutions. *Universidade da Beira Interior, Portugal*, preprint **6**.

[32] A.S. Demidov, J.-P. Lohéac (2001) A quasi-contour model of Stokes-Leibenson problem for Hele-Shaw flows. *CNRS UMR 5585 preprint 328.*

[33] A.S. Demidov, J.-P. Lohéac (2002) On the evolution near some attractive manifold in a problem for the Hele-Shaw flows. *Abstracts of International conference "Mathematical ideas of P.L. Chebyshev and their application for modern problems of natural sciences"(Obninsk, Russia, May 2002, 14-18)*, 37-38.

[34] A.S. Demidov, J.-P. Lohéac (2003) The Stokes–Leibenson Problem for Hele-Shaw Flows. *Patterns and Waves* (Eds. A. Abramian, S. Vaculenko, V. Volpert), Saint Peresburg, 103–124.

[35] О.А. Васильева, А.С. Демидов (1999) Конечноточечная модель задачи Стокса–Лейбензона для Хил-Шоу течения. *Фундаментальная и прикладная матем.*, Т. 5, № 5, 67–84.

[36] А.С. Демидов (1998) Полигональная модель для течения Хил-Шоу. *Успехи Матем. Наук*, Т. 53, № 4, 195–196.

[37] П.Я. Кочина, А.Р. Шкирич (1954) К вопросу о перемещении контура нефтеносности (эксперимент) *Известия АН СССР, отд. технич. наук*, №11, 105–107.

[38] P.G. Saffman, G.I. Taylor (1958) The penetration of a fluid into a porous medium of Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. Royal Soc. A*, **245**, 312–329.