Université d'Evry Val-d'Essonne Paris-Saclay **Année universitaire 2019-2020**
L2 SDV - MSV31

Rappels de probabilités

Ce document résume les notions de probabilités vues en Licence 1 et essentielles à la maîtrise du cours de statistique de Licence 2

1 Généralités sur les variables aléatoires

Variable aléatoire

Une **variable aléatoire réelle** X est une "machine" qui lorsqu'elle est interrogée, renvoie un nombre.

Les variables aléatoires sont désignées par des lettres capitales : X, Y, W, T, Z,...

Réalisation d'une variable aléatoire

Une fois la "machine" interrogée, la variable aléatoire retourne ce qu'on appelle une **réalisation** de la variable aléatoire. Pour la variable aléatoire X, on note x une réalisation.

Exemples

1. la "machine" = lancer un dé. On note X la variable aléatoire associée. Elle est discrète puisque les seuls résultats possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$. On lance le dé, on obtient par exemple 3 et on écrit $x = 3$ la réalisation de cette variable aléatoire
2. la "machine" = temps d'attente à un guichet SNCF. On note X la variable aléatoire associée. Elle est continue puisque les résultats en minutes appartiennent à un intervalle $[0, m]$. Par exemple $x = 5.3$ min.

Il reste à définir les probabilités associées à chaque résultat. On note Ω l'ensemble des valeurs qui peuvent sortir de la "machine" et qui sont donc de probabilité non nulles.

Loi de probabilité

1. Soit X une variable aléatoire **discrète** telle que $\Omega = \{x_1, ..., x_N\}$. La loi de probabilité de X est définie pour tout $i \in 1, ..., N$ par

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$$

2. Soit X une variable aléatoire **continue**. On appelle **densité** de probabilité la fonction $f(x)$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\mathbb{P}(X \in [x; x + \delta])}{\delta}$$

Pour δ proche de 0, $f(x)dx \approx \mathbb{P}(X \in [x; x + \delta])$

On a :

Cas discret	Cas continu
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) \geq 0 \ \forall x_i \in \Omega$ $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$	$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
$\forall A \subset \Omega$: $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{i:x_i \in A} p_i$	$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)dx$

Exemples

1. Pour le lancé d'un dé équilibré :

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{6}$$

   On peut calculer la probabilité de faire moins de 2 :

$$\mathbb{P}(X \in \{1,2\}) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{3}$$

2. Pour le temps d'attente, on utilise la densité $f(x) = e^{-x}$. On peut calculer la probabilité d'attendre moins d'une minute

$$\mathbb{P}(X \in [0,1]) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$$

Fonction de répartition

On appelle **fonction de répartition** la fonction F définie par :

$$\begin{aligned} F \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

i) $F(x) \in [0,1]$
ii) F est une fonction croissante
iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
iv) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
v) — Pour une variable aléatoire discrète, F est une fonction en escaliers
   — Pour une variable aléatoire continue, F est une fonction continue

Espérance

L'**espérance** $\mathbb{E}[X]$ d'une variable aléatoire X est définie par :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i \qquad \text{(cas discret)}$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \qquad \text{(cas continu)}$$

Propriétés :

1. $\mathbb{E}[aX+b] = a\mathbb{E}[X] + b$
2. $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
3. Attention : $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

— La **variance** $V(X)$ d'une variable aléatoire X est définie par :

$$V(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

— L'**écart-type** est défini par

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Propriétés :

Pour toute variable aléatoire réelle X, on a :

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

1. $V(X) \geq 0$
2. $V(aX+b) = a^2 V(X)$
3. $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$

Covariance

Pour un couple de variables aléatoires (X, Y), la **covariance** est définie par :

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

Propriétés :

1. $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$ mais $Cov(X,Y) = 0 \nRightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$
2. $V(X) = Cov(X,X)$

Pour un couple de variables aléatoires (X, Y), le **coefficient de corrélation** est défini par :

$$Cor(X,Y) = \rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

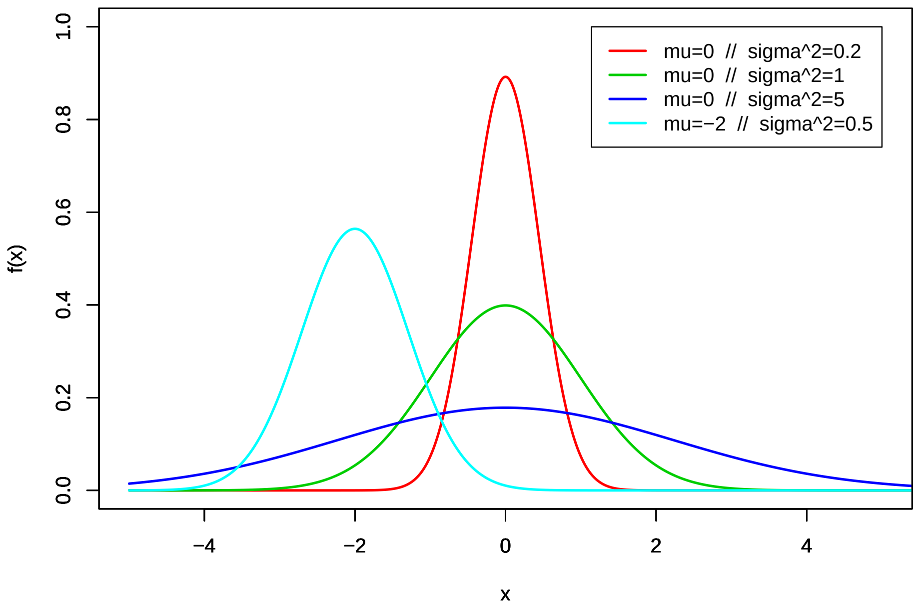
$$\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$$

2 La loi normale

Une variable aléatoire X suit une loi normale (ou loi de Gauss-Laplace) de paramètres μ et σ^2 si sa densité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

On note : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$



Fonction de répartition :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

Il n'existe pas de forme analytique de la fonction de répartition F.

$$\mathbb{E}[X] = \mu \quad \text{et} \quad V(X) = \sigma^2$$

Stabilité par combinaisons linéaires :

1. Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$$aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

2. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors :

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Loi normale centrée réduite

On appelle **loi normale centrée réduite** la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Par convention, on note ϕ la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Φ sa fonction de répartition.

Un calcul standard : Soient $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $a < b$ deux nombres fixés. On veut calculer $\mathbb{P}(a < X < b) =?$

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

avec Z la loi normale centrée réduite. Alors,

$$\mathbb{P}\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

En utilisant la notation Φ :

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Les résultats pour $\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$ et $\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})$ se trouvent dans des tables où seuls les résultats $\Phi(x)$ pour $x \geq 0$ sont donnés.
En effet, on utilisera la symétrie de la densité de la loi normale pour avoir $\Phi(-x)$ si l'on connaît $\Phi(-x)$:

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \ : \ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

3 Probabilités conditionnelles

Soient X une variable aléatoire et A et B deux sous-ensembles de Ω (l'ensemble des valeurs accessibles par X). Il est possible de calculer la probabilité de l'événement $X \in A$ sachant que l'événement $X \in B$ est vrai / a eu lieu.

Probabilités conditionnelles

Avec $A, B \subset \Omega$, la **probabilité conditionnelle** de A sachant B notée $\mathbb{P}(X \in A | X \in B)$ est donnée par la formule :

$$\mathbb{P}(X \in A | X \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A \cap X \in B)}{\mathbb{P}(X \in B)}$$

Ci-dessous, pour faciliter l'écriture, on note $\mathbb{P}(A)$ pour $\mathbb{P}(X \in A)$, $\mathbb{P}(B)$ pour $\mathbb{P}(X \in B)$...

Soit E un ensemble. $B_1, B_2, ..., B_n$ constituent une partition de E si :
— $\forall i \in \{1, ..., n\}; B_i \neq \emptyset$
— $\forall i \neq j; B_i \cap B_j = \emptyset$
— $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = E$

Formule des probabilités totales

Si les événements $B_1, B_2, ..., B_n$ forment une partition de Ω

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) + ... + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i)\end{aligned}$$

Formule de Bayes

- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(B)}$$

- Si les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de Ω alors

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}$$

Indépendance

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

On note $A \perp\!\!\!\perp B$

Si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$