Université d'Evry Val-d'Essonne Paris-Saclay **Année universitaire 2019-2020**
L2 SDV - MSV31

TD 3 - Estimation ponctuelle

Exercice 1 *Loi normale à un paramètre*

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de loi parente $X \sim \mathcal{N}(\theta, \theta(1-\theta))$, où $\theta \in [0,1]$ est un paramètre inconnu. On considère l'estimateur :

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Montrer que T est un estimateur sans biais et convergent du paramètre θ, sachant que $V(X^2) = 2\theta^2(1-\theta^2)$.

Exercice 2 *Autre loi normale à un paramètre*

Les éléments d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de densité $f_\theta(x) = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi}} e^{-\frac{\theta x^2}{2}}$ où $\theta > 0$. Pour estimer le paramètre θ à partir d'un échantillon $X_1, ..., X_n$, on propose d'utiliser l'estimateur $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$. On peut montrer que $E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n-2}\theta$ et $V(\hat{\theta}) = \frac{2n^2\theta^2}{(n-2)^2(n-4)}$.

1. Calculer le biais de l'estimateur $\hat{\theta}$.
2. Calculer son erreur quadratique moyenne.
3. L'estimateur $\hat{\theta}$ est-il convergent ?
4. Déduire de $\hat{\theta}$ un estimateur $\tilde{\theta}$ non biaisé.
5. Ce nouvel estimateur est-il convergent ?
6. Lequel des deux estimateurs est le meilleur (pour $n > 2$) ?

Exercice 3 *Densité triangulaire*

Soit X une variable aléatoire continue de support $[0,1]$ définie par :

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta}x & \text{si } x \in [0,\theta] \\ \frac{2}{\theta-1}(x-1) & \text{si } x \in [\theta, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Faire le dessin de cette loi continue triangulaire pour $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{2}{3}$.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$
3. A partir du calcul de l'espérance, proposer un estimateur non biaisé du paramètre θ pour un échantillon $X_1, ..., X_n$
4. Calculer l'erreur quadratique moyenne et dire si cet estimateur est convergent