ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Март 2013** **Выпуск 69. С. 3-8**

А. С. Демидов
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Московский физико-технический
университет, Россия
alexandre.demidov@mtu-net.ru

Ж.-П. Лоэак
Центральная школа Лиона
Лион, Франция
Jean-Pierre.Loheac@math.cnrs.fr

В. Рунге
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Россия
Центральная школа Лиона, Франция
runge.vincent@gmail.com

# АТТРАКТОР–РЕПЕЛЛЕР В ПРОСТРАНСТВЕ КОНТУРОВ В ЗАДАЧЕ СТОКСА — ЛЕЙБЕНЗОНА ДЛЯ ХИЛЕ — ШОУ ТЕЧЕНИЯ

Показано, что в пространстве квазиконтуров, являющихся свободной границей в задаче Стокса — Лейбензона, имеется многообразие коразмерности 1, некоторые точки которого являются аттрактором в случае стока и репеллером в случае источника, тогда как другие точки являются репеллером в случае стока и аттрактором в случае источника. Библиография: 36 назв. Иллюстрации:

## 1. Задача Стокса–Лейбензона. Теоремы о разрешимости. Возмущение окружности

**1.1.** Классическая постановка задачи Стокса–Лейбензона такова. Пусть $\Omega_0$ — односвязная область в $\mathbb{R}^2$, ограниченная достаточно гладкой кривой $\Gamma_0$, окружающей начало координат $\{0\}$. Область $\Omega_0$ соответствует пятну жидкости в некоторый начальный момент, а источник-сток этой жидкости локализован в начале координат $\{0\} \in \Omega_0$. Заданная область деформируется следующим образом: в момент $t$ точка $\mathbf{s}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ границы $\Gamma_t$ области $\Omega_t$ движется со скоростью $\dot{\mathbf{s}} = (\dot{x}, \dot{y})$, определяемой кинематическим условием

$$\dot{\mathbf{s}} = \nabla u \ \text{ на } \ \Gamma_t, \tag{1.1}$$

где $\nabla u = (u_x, u_y)$ — градиент функции $u(t;\cdot,\cdot) : \Omega_t \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию Стокса **[1]**

$$u_{xx} + u_{yy} = q\delta(x, y) \ \text{ в } \ \Omega_t \tag{1.2}$$

и динамическому условию Лейбензона **[2]**

$$u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_t, \tag{1.3}$$

Работа поддержана C.N.R.S (проект “EDC25172”), регионом Рона-Альпы (проект “CIBLE 2010”) и Российским фондом фундаментальных исследований.

где $\delta(x,y)$ — $\delta$-функция Дирака, сосредоточенная в начале координат, а ненулевой коэффициент $q\in\mathbb{R}$ характеризует мощность источника-стока. В дальнейшем будем предполагать, что область $\Omega_t$ симметрична относительно оси $x$. С учетом этого удобно считать, что $q=2$. При этом $t>0$ будет соответствовать случаю источника, а $t<0$ — случаю стока.

Отметим некоторые результаты исследований задачи (1.1)–(1.3). Они начались с работ Галина [**3**] и Кочиной [**4, 5**], опубликованных в 1945 г. В этих работах было выведено уравнение

$$2\pi\,\mathrm{Re}\,[\,\dot f(\zeta,t)\,\overline{\zeta f'(\zeta,t)}\,]=q,\quad |\zeta|=1, \tag{1.4}$$

для однолистного отображения $f(\cdot,t)$ единичного диска $\{\zeta\in\mathbb{C}\,\big|\,|\zeta|\leqslant 1\}$ на искомую область $\Omega_t$. В предположении, что $f(\zeta,t)=a_1(t)+a_2(t)\zeta+\ldots+a_n(t)\zeta^n$, в [**3**] была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений на коэффициенты $a_j(t)$. В случае $n=2$ эта система принимает вид [**5**]

$$a_1^2(t)a_2(t)=a_1^2(0)a_2(0),\quad a_1^2(t)+2a_2^2(t)=a_1^2(0)+2a_2^2(0)-qt/\pi.$$

Если $|a_2/a_1|<1/2$, то образ единичной окружности при отображении $f(\cdot,t)$ есть улитка Паскаля $\Gamma_0$ с полярным радиусом $\{r(\theta)=a\cos\theta+b, b>a\}$. В случае стока (т.е. при $qt<0$) она за конечное время трансформируется в кардиоиду $\Gamma_{t_*}$, острие которой, как оказывается, не достигает точки стока. Далее (т.е. при $qt<qt_*$, когда $|a_2/a_1|>1/2$), отображение $f(\cdot,t)$ перестает быть однолистным и решение $t\mapsto\Gamma_t$ прекращает свое существование. Аналогичный эффект для окружности, центр которой сдвинут относительно точки стока был установлен Куфаревым [**6**]. Спустя 24 года этот результат Куфарева получил Ричардсон [**7**], опираясь на доказанную им в [**7**] теорему о постоянстве комплексных моментов

$$M_n\overset{def}{=}\int_{\Omega_t} z^n\,\overline{dz}\wedge dz,\quad n\geqslant 1.$$

Первые теоремы о локальной разрешимости уравнения (1.4) были доказаны в [**8**].

В [**3**]–[**5**], [**8**] задача (1.1)–(1.3) интерпретировалась, как течение вязкой жидкости в срезе пористой среды. Последние десятилетия такого рода задачи довольно часто стали называть задачами о течении Хиле-Шоу, или просто задачей Хиле-Шоу со свободной границей . Интерес к таким задачам особенно усилился за последние годы (см., в частности, [**9**]–[**14**] и цитируемую там литературу). Это вызвано не только использованием такого рода течений в инженерной практике, материаловедении, в процессах, связанных с ростом кристаллов (отметим в связи с этим работы [**15**]–[**17**]), но и тем, что эти задачи являются хорошими моделями (см., например, [**18**]–[**20**]) некоторых весьма сложных двухфазных задач. Поэтому исследование таких моделей позволяет в какой-то мере предугадать особенности главного члена асимптотики решения задач с фазовыми переходами (см., в частности, [**21**]).

**1.2.** Важным моментом в исследовании задачи (1.1)–(1.3) было осознание того неожиданного факта, что в случае стока ($qt<0$) решение этой задачи не существует ни при каком сколько угодно малом $t$, если начальный контур $\Gamma_0$ не аналитичен хотя бы в одной точке. Другими словами, при таком начальном контуре сток невозможен: задача не имеет решения. Причина этого разъяснена ниже. А может ли такой (неаналитический) контур сдвинуться в случае источника? Ответ на этот вопрос был получен сравнительно недавно в [**22, 23**], где было доказано, что при малых временах решение задачи (1.1)–(1.3) в случае источника существует. На первый взгляд, все это удивительно, ибо закон движения контура $\Gamma_0$ априори никак не зависит ни от его аналитичности, ни от типа “двигателя”: источник или сток. Внутренняя причина этих фактов ниже выявлена при рассмотрении эволюции гармоник слабого возмущения окружности.

Введем в $\Omega_t^+=\Omega_t\cap\mathbb{R}^2_+$ функцию $v$, гармонически-сопряженную функции $u$. Запараметризуем точку $\mathbf{s}(t)\in\Gamma_t^+=\Gamma_t\cap\mathbb{R}^2_+$ числом $\eta$, задающим ту линию уровня $\{(x,y)\in\Omega_t\big|v(t;x,y)=\eta\}$ функции $v$, которая содержит эту точку $\mathbf{s}(t)$. В силу симметрии $\Omega_t$ и выбранного (по этой причине) значения $q=2$, параметр $\eta$ меняется от нуля до единицы. Тем самым определена непрерывная функция

$$s(t,\cdot):[0,1]\ni\eta\mapsto s(t,\eta)=|s_0s_\eta|\in[0,|\Gamma_t^+|],$$

где $|s_0 s_\eta|$ — длина дуги $\breve{s_0 s_\eta}$ кривой $\Gamma_t^+$, отсчитываемая в положительном направлении от точки $s_0$ пересечения кривой $\Gamma_t^+$ с положительной полуосью $x$ до точки $s_\eta$ пересечения этой кривой с линией уровня $\{v(t;x,y)=\eta\}$.

Определим при каждом $t$ в замыкании полуполосы

$$\Pi = \{u+iv \in \mathbb{C} \big| \ -\infty < u < 0,\ 0 < v < 1\}$$

функцию Гельмгольца — Кирхгофа **[24]** формулой

$$A+iB : w = u+iv \mapsto A(t;u,v)+iB(t;u,v) = \ln\left|\frac{\partial z(t;w)}{\partial w}\right| + i\arg\frac{\partial z(t;w)}{\partial w}, \tag{1.5}$$

где $z = x+iy \in \Omega_t^+$. Имеем

$$x(t,v) = x(t,0) - \int_0^v e^{a(t,\eta)} \sin b(t,\eta)\, d\eta, \quad y(t,v) = \int_0^v e^{a(t,\eta)} \cos b(t,\eta)\, d\eta, \tag{1.6}$$

где

$$x(t,0) = \int_{-\infty}^0 e^{A(t;u,0)}\, du,$$

а

$$a(t,v)+ib(t,v) = A(t;0,v)+iB(t,0,v). \tag{1.7}$$

Отметим, что поскольку

$$|\nabla u|\big|_{s=s(t,v)\in\Gamma_t} = e^{-a(t,v)},$$

кинетическое условие (1.1) можно записать в виде

$$e^{-a} = \dot{x}\cos b + \dot{y}\sin b. \tag{1.8}$$

Таким образом, задача (1.1)–(1.3) может быть переформулирована в терминах функций $a$ и $b$. А именно **[25]**, задача (1.1)–(1.3) эквивалентна задаче Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\dot{b}(t,v) = e^{-2a}a' + b'e^{-a}\int_0^v \left[e^a\dot{a} - e^{-a}b'\right] d\xi, \quad \dot{b} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial b}{\partial t}, \quad b' \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial b}{\partial v} \tag{1.9}$$

относительно функций $a$ и $b$, связанных между собой (при каждом $t$) преобразованием Гильберта: согласно (1.7) функции $a$ и $b$ являются следом при $u=0$ гармонически-сопряженных в полуполосе $Q$ функций $A$ и $B$. По-существу, именно это обстоятельство является препятствием для существования решения в случае стока при отсутствии аналитичности кривой $\Gamma_0$ хотя бы в одной точке. Дело в том, что уравнение (1.9) жестко связывает возможность эволюции функции $t \to b(t,v)$, т.е. эволюции угла наклона касательной к $\Gamma_t$ в точке $s_v \in \Gamma_t$, с эволюцией коэффициента продольной деформации $\exp a(t,v)$ контура в этой точке. В случае стока (т.е. при $t<0$), когда контур "съеживается", продольная деформация контура в точке $s_v \in \Gamma_0$, определяемая уравнением (1.9), оказывается невозможной, если в этой точке контур $\Gamma_0$ не аналитичен. Уравнение (1.9) в этом случае (при любом сколь угодно малом $-t>0$) неразрешимо по причине, вскрытой в теореме 1.2 и связанной с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье аналитической функции на окружности.

**1.3.** Заметим, что $B(t,u,v) \equiv \pi v$ если (и только если) кривая $\Gamma$ является окружностью $\{z\in\mathbb{C}\big||z| = R_0 > 0\}$, центр которой совпадает с началом координат (т.е. носителем $\delta$-функции в уравнении (1.2)). Учитывая это, представим функцию $b$ в виде

$$b(t,v) = \pi v + \beta(t,v).$$

Заметим, что $\beta(t,0) = \beta(t,1) = 0$ (в силу симметрии и дифференцируемости кривой $\Gamma$), и разложим функцию $\beta(t,\cdot) : [0,1] \ni v \mapsto \beta(t,v)$ в ряд Фурье

$$\beta(t,v) = \sum_{k\geqslant 1} \beta_k(t)\sin \pi k v$$

по ортобазису $e_k : [0,1] \ni v \mapsto \sin \pi k v$, $k \in \mathbf{N}$, пространства $L^2(0,1)$.

Легко видеть, что те же коэффициенты Фурье $\beta_k(t)$ определяют и функцию $\alpha_0(t)$, задаваемую равенством

$$A(t;u,v) = \alpha_0(t) + \pi u + \sum_{k\geqslant 1} \beta_k(t) e^{\pi k u} \cos \pi k v.$$

Ясно, эту функцию можно выразить также равенством

$$a(t,v) = \alpha_0(t) + \alpha(t,v), \quad \alpha(t,v) = \sum_{k\geqslant 1} \beta_k(t) \cos \pi k v.$$

Действительно, приращение площади $|\Omega_t| = 2|\Omega_t^+|$ области $\Omega_t$ за единицу времени равно

$$\int\limits_\Gamma \dot{\mathbf{s}}\, d\Gamma \overset{(1.1)}{=} \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma,$$

т.е. коэффициенту при $\delta$-функции в уравнении (1.2). Другими словами,

$$\frac{d}{dt}|\Omega_t^+| = 1 \iff |\Omega_t^+| = t + t_0, \quad t_0 = |\Omega_0^+|. \tag{1.10}$$

В терминах функции Гельмгольца — Кирхгофа это условие принимает вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 \Big( \int\limits_{-\infty}^0 e^{2A(t;u,v)}\, du \Big)\, dv = 1,$$

поскольку якобиан отображения $w \mapsto e^{A+iB}$ равен $|\partial z/\partial w| \overset{(1.5)}{=} e^{2A}$. Отсюда следует, что коэффициент $e^{a(t,v)}$ продольной деформации контура $\Gamma$ определяется из уравнения (1.10). Поэтому он, а потому и функция $\alpha_0(t)$, зависят от $|\Omega_0|$ и коэффициентов Фурье $\beta_k(t)$. Таким образом, искомая деформация начальной кривой $\Gamma_0$, определяемая задачей Коши для уравнения (1.9), полностью характеризуется эволюцией коэффициентов Фурье $\beta_k(\cdot)$ в разложении

$$\beta(t,v) = \sum_{k\geqslant 1} \beta_k(t) \sin \pi k v.$$

**Теорема 1.1** (см. [**26**]). *Уравнение* (1.9) *представимо в виде*

$$\dot{\beta} - \mathbf{K}(\beta)\dot{\beta} = \frac{1}{2(t+t_0)}\, \mathbf{F}(\beta). \tag{1.11}$$

*Здесь* $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1$ *и* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1$, *где*

$$[\,\mathbf{K}_0(\beta)\dot{\beta}\,](t,v) = b'(t,v)\, e^{-\alpha(t,v)} \int\limits_0^v e^{\alpha(t,\eta)}\, \dot{\alpha}(t,\eta)\, d\eta,$$

$$[\mathbf{K}_1(\beta)\dot{\beta}](t,v) = \Bigg( \sum_{j\geqslant 1} \frac{2\beta_j \dot{\beta}_j}{j+1} \Bigg) \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \pi k v + [\mathbf{r}_1(\beta)\dot{\beta}](t,v),$$

$$[\mathbf{F}_0(\beta)](t,v) = \frac{1}{\pi}\Bigg\{ e^{-2\alpha}\alpha' - b' e^{-\alpha} \int\limits_0^v e^{-\alpha} b'\, d\eta + \pi b' e^{-\alpha} \int\limits_0^v e^{\alpha}\, d\eta \Bigg\},$$

$$[\mathbf{F}_1(\beta)](t,v) = \Bigg( \sum_{j\geqslant 1} \frac{2\beta_j^2}{j+1} \Bigg) \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin \pi k v + [\,athbfs_1(\beta)](t,v).$$

*При этом*

$$|\mathbf{r}_1(\beta)\dot{\beta}| \leqslant C\|\beta\|_1^2 \|\beta\|_0, \quad |\mathbf{s}_1(\beta)| \leqslant C\|\beta\|_1^3,$$

*где*

$$\|\beta\|_1 = \max_t \sqrt{\sum_{k\geqslant 1} \Big( k\beta_k(t) \Big)^2}, \quad \|\dot{\beta}\|_0 = \max_t \sqrt{\sum_{k\geqslant 1} \Big( \dot{\beta}_k(t) \Big)^2}.$$

*Покоординатно динамическая система* (1.11) *выглядит так:*

$$2(t+t_0)(\beta_1\dot\beta_1 + r_1(\beta)\dot\beta) = (-\beta_1^2 + 2\sum_{j\geqslant 2}\beta_j^2\Big) + s_1(\beta),$$

$$2(t+t_0)(\dot\beta_k + r_k(\beta)\dot\beta) = -(k+2)\beta_k + s_k(\beta), \quad k \geqslant 2,$$

*где*

$$|r_k(\beta)\dot\beta| \leqslant C\|\beta\|_1^{1+\operatorname{sgn}|k-1|}\|\dot\beta\|_0, \quad |s_k(\beta)| \leqslant C\|\beta\|_1^{2+\operatorname{sgn}|k-1|}.$$

Из теоремы 1.1 с помощью кропотливых функционально-геометрических построений может быть выведена следующая теорема.

**Теорема 1.2** (см. [**25**]–[**27**]). *Если начальный контур* $\Gamma_0$ — *малое* (*определяемое формулами* (1.2)) *возмущение окружности радиуса* $R(0)$, *то в случае источника его эволюция* $\Gamma_t$ *продолжается бесконечно долго и она единственна на любом временном интервале. Отклонение* $\Gamma_t$ *от окружности радиуса* $R(t) = \sqrt{R^2(0) + 2t/\pi}$, *начиная с некоторого момента, почти монотонно стремится к нулю. Точнее, существует число* $\rho \in (0, 1/8)$ *такое, что для любого* $\mu \in (0,1)$ *функция*

$$[0,1] \ni v \mapsto b(t,v) = \pi v + \beta(t,v), \quad \beta(t,v) = \sum_{n\geqslant 1}\beta_n(t)\sin\pi n v, \tag{1.12}$$

*определяющая контур* $\Gamma_t$, *существует при любом* $t > 0$, *если только начальная угловая функция, задающая контур* $\Gamma_0$, *т.е. функция*

$$[0,1] \ni v \mapsto b(0,v) = \pi v + \sum_{n\geqslant 1}\beta_n^0 \sin\pi n v, \tag{1.13}$$

*удовлетворяет условию*

$$\sum_{k\geqslant 2}(k\beta_k^0)^2 \leqslant (\mu\rho)^{1/2}|\beta_1^0|^{3/2}, \quad 0 < |\beta_1^0| \leqslant \mu\rho.$$

*При этом*

$$|\dot\beta_1(0) - \dot{\overline{\beta}}_1(0)| \leqslant \mu, \quad \sqrt{\sum_{k\geqslant 2}|\dot\beta_k(0) - \dot{\overline{\beta}}_k(0)|^2} \leqslant \mu,$$

*где*

$$\overline{\beta}_1{}^2(t) = \frac{1}{t+t_0}\left(t_0\beta_1^2(0) + 2\sum_{k\geqslant 2}\beta_k^2(0)\int_0^t \frac{d\tau}{(1+\tau/t_0)^{k+2}}\right), \tag{1.14}$$

$$\overline{\beta}_k(t) = \frac{\beta_k(0)}{(1+t/t_0)^{k/2+1}}. \tag{1.15}$$

*Кроме того, существует константа* $C$ (*немного превосходящая единицу*) *такая, что при любом* $t \geqslant 0$ *справедливы оценки*

$$|\dot\beta_1(t) - \dot{\overline{\beta}}_1(t)| \leqslant C\mu, \quad \sqrt{\sum_{k\geqslant 2}|\dot\beta_k(t) - \dot{\overline{\beta}}_k(t)|^2} \leqslant C\mu.$$

Векторное поле $(\dot{\overline{\beta}}_1, \dot{\overline{\beta}}_k)$ для случая $\beta_j(0) = 0$ при $j \neq 1$ и $j \neq k$.

**Замечание 1.1.** Формулы (1.15) объясняют природу отмеченного выше результата: если в случае $qt < 0$, т.е. стока, задача (1.1)–(1.3) разрешима при любом сколь угодно малом $t$ (в нашем случае $q = 2 > 0$ это означает, что речь идет о любом малом отрицательном $t$), то начальный контур $\Gamma_0$ необходимо аналитичен. Действительно, в силу (1.15) функция (1.12) будет определена при сколь угодно малом $t < 0$ лишь тогда, когда коэффициенты Фурье $\beta_k^0 = \beta_k(0)$ функции (1.13) экспоненциально быстро убывают и определяют тем самым (см., например, [**28**, § 12]) аналитическую функцию.

Отметим также, что последнее утверждение (о бесконечном по времени “дрейфе” возмущенной окружности; ср. с [**29**]) согласуется с таким фактом: если при деформации $t \mapsto \Gamma_t$ кривая $\Gamma_{t*}$ при некотором конечном $t_* \neq 0$ гомотетична окружности с центром в начале координат $\{0\}$, т.е. там, где локализован источник-сток, то кривая $\Gamma_0$, а потому и все кривые $\Gamma_t$ гомотетичны той же самой окружности.

## 2. Квазиконтурная модель. Критическое многообразие. Аттрактор-репеллер

Теорема 1.2 проясняет эволюцию слабых возмущений окружности (частично представленную на рис. 1). В случае произвольного начального контура уравнение (1.11) изучалось в рамках аппроксимационной так называемой квазиконтурной [**30**]–[**32**] (ранее именовавшейся полигональной [**34**], конечноточечной [**33**]) модели задачи (1.1)–(1.3).

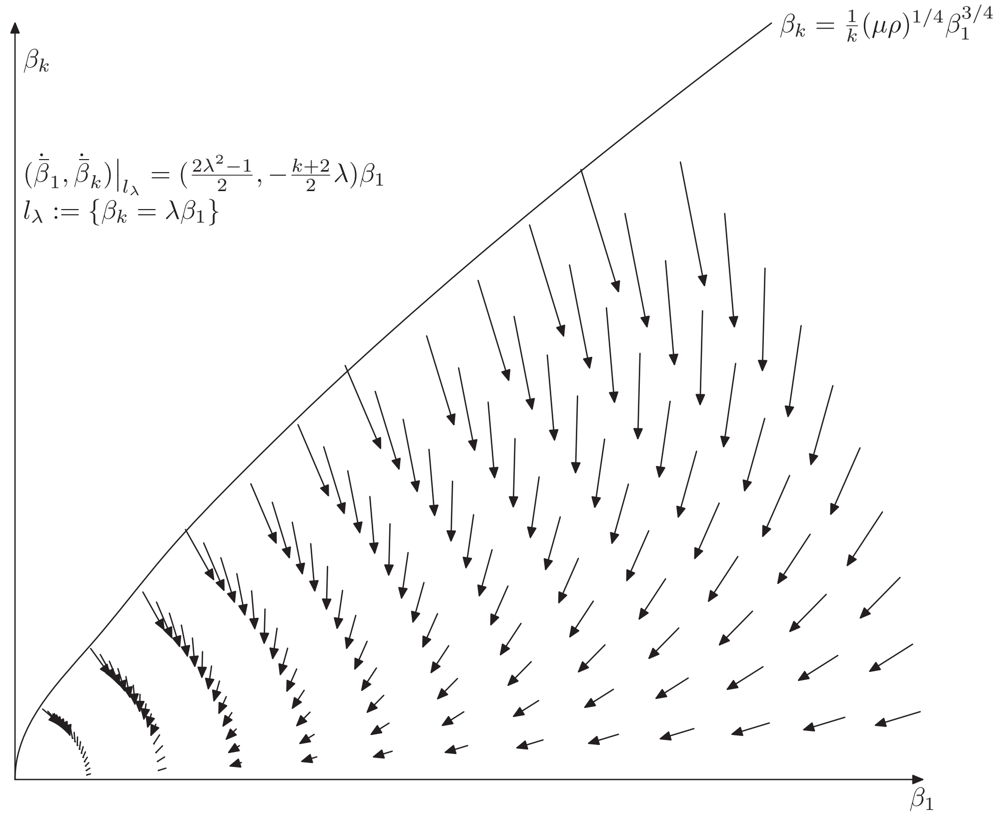



Рис. 1. Векторное поле $(\dot{\bar{\beta}}_1, \dot{\bar{\beta}}_k)$ для случая $\beta_j(0) = 0$ при $j \neq 1$ и $j \neq k$.

**2.1.** Квазиконтурная модель задачи (1.1)–(1.3) отличается от самой этой задачи лишь в следующем.

Во-первых, класс гладких кривых $\Gamma_t$ заменен на класс квазиконтуров. Ими являются полигональные контура $\Gamma_t^m$, ограничивающие полигональные области $\Omega_t^m$, симметричные (как и области $\Omega_t$) относительно оси $Ox$. Ординаты вершин $s_0, s_{\pm 1}, \dots, s_{\pm m}$ квазиконтура $\Gamma_t^m$ имеют знак своего индекса, в частности, вершина $s_0$ лежит на положительной полуоси $Ox$. Эти вершины образуют $2m+1$ его сторон $[s_0, s_{\pm 1}]$, $[s_{\pm 1}, s_{\pm 2}]$, $\dots$, $[s_{\pm(m-1)}, s_{\pm m}]$, $[s_m, s_{-m}]$.

Во-вторых, эволюция этих сторон определяется движением вершин квазиконтура $\Gamma_t^m$, согласно нижеприведенному условию (2.1) (наследующему условие Стокса (1.2) и динамическое условие Лейбензона (1.3)), а также условию (2.3) (наследующему кинематическое условие (1.1)).

Введем вектор-функцию $\mathbf{N} : t \mapsto \mathbf{N}(t) = (N_1(t), \dots, N_m(t))$ и вектор $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, в терминах которых будем задавать квазиконтур $\Gamma_t^m$. Здесь и ниже через $N_j(t)$ обозначен угол наклона к оси $Ox$ внешней нормали к $j$-й стороне $[s_{j-1}, s_j]$ квазиконтура $\Gamma_t^m$. При этом для [1) ] $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} &-\pi/2 < N_1 < \pi/2, \\ &-\pi < N_k - N_{k-1} < \pi \quad \forall k \in \{2, \dots, m\}, \\ &0 < N_m < 2\pi. \end{aligned}$$

Далее, параметр $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ однозначно определяется по начальному контуру $\Gamma_0^m$ через решение задачи

$$u_{xx} + u_{yy} = 2\delta(x, y) \ \text{ в } \ \Omega_t^m, \quad u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_t^m \tag{2.1}$$

при $t = 0$ и задает посредством формул (2.2) длины сторон квазиконтура $\Gamma_t^m$. А именно, $\sigma_k$ есть то значение функции $v$, гармонически сопряженной в $\Omega_t^m \cap \mathbb{R}_+^2$ к функции $u$, при котором $k$-я вершина $s_k \in \Gamma_t^m$ принадлежит линии уровня $\{(x, y) \in \Omega_t^m \mid v(x, y) = \sigma_k\}$. Очевидно, что

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_m < \sigma_{m+1} = 1$$

а координаты $(x_k, y_k)$ вершины $s_k$ (для $k = 1, \dots, m$) определяются в соответствии с (1.6) по формулам

$$x_k = x_0 - \int_0^{\sigma_k} e^a \sin b \, dv, \quad y_k = \int_0^{\sigma_k} e^a \cos b \, dv, \tag{2.2}$$

где

$$x_0 = \int_{-\infty}^{0} e^{A(t;u,0)} \, du, \quad a(t, v) + ib(t, v) = A(t; 0, v) + iB(t, 0, v),$$

а функция Гельмгольца — Кирхгофа

$$A + iB : w = u + iv \mapsto A(t; u, v) + iB(t; u, v) = \ln \left| \frac{\partial z(t; w)}{\partial w} \right| + i \arg \frac{\partial z(t; w)}{\partial w}$$

соответствует для $z = x + iy \in \Omega_t^m \cap \mathbb{C}_+$ (ср. с (1.5)) решению $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$ задачи (2.1).

Что касается кинематического условия для квазиконтура $\Gamma_t^m$, то (учитывая (1.1)⇔(1.8)) зададим его формулой

$$R_k = \dot{x}_k \cos b_k + \dot{y}_k \sin b_k, \quad k = 0, \dots, m, \tag{2.3}$$

где $b_k = b(t, \sigma_k)$, а $R_k$ — это “нормальная” скорость точки $s_k \in \Gamma_t^m$, точнее, алгебраическое значение проекции скорости точки $s_k \in \Gamma_t^m$ на внешнюю “нормаль” к $\Gamma_t^m$, которая есть биссектриса внешнего угла при вершине $s_k$ полигона $\Gamma_t^m$. Полагая $N_0 \overset{\text{def}}{=} -N_1$, заметим, что

$$b_0 = 0, \quad b_k = \frac{N_k + N_{k+1}}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Отметим очевидное утверждение.

**Предложение 2.1.** *Квазиконтур $\Gamma_0$ — правильный (2m+1)-многоугольник, а источник-сток находится в его центре если и только если* $(\mathbf{N}, \boldsymbol{\sigma}) = (\widehat{\mathbf{N}}, \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) \overset{\text{def}}{=} (\widehat{N}_1, \dots, \widehat{N}_m; \widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_m)$, *где*

$$2\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2 - \widehat{N}_1 = \cdots = \widehat{N}_{m+1} - \widehat{N}_m = \frac{2\pi}{2m+1},$$

$$\widehat{\sigma}_1 = \widehat{\sigma}_2 - \widehat{\sigma}_1 = \cdots = \widehat{\sigma}_m - \widehat{\sigma}_{m-1} = \frac{2}{2m+1}.$$

---

[1) ] Угол наклона внешней нормали к другим сторонам квазиконтура определяется из условия его симметрии относительно оси $Ox$. В частности, угол наклона к $(m+1)$-й стороне $[s_m, s_{-m}]$ равен $\pi$.

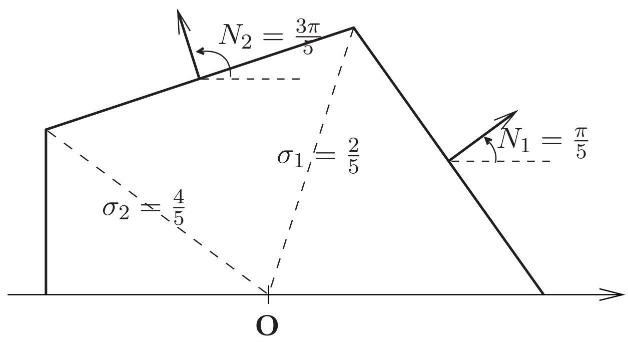



Рис. 2. Верхняя часть правильного пятиугольного квазиконтура $\Gamma_t^5$, в центре которого источник или сток.

Согласно сказанному выше квазиконтур $\Gamma_t^m$ однозначно задается параметром $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\Gamma_0^m)$ и вектор-функцией $\mathbf{N} : t \mapsto \mathbf{N}(t)$.

**Теорема 2.1** (см. [**32**]). *Вектор-функция* $\mathbf{N} : t \mapsto \mathbf{N}(t) = (N_1(t), \dots, N_m(t))$ *является решением матричного уравнения*

$$Q(\mathbf{N}, \boldsymbol{\sigma})\dot{\mathbf{N}} = \exp(-2\alpha_0)\, P^0(\mathbf{N}, \boldsymbol{\sigma}) + \dot{\alpha}_0\, P^1(\mathbf{N}, \boldsymbol{\sigma}),$$

*где*

$$e^{-2\alpha_0(t)} = (t + |\Omega_0^+|) \int_0^1 \left( \int_{-\infty}^0 e^{2(\pi u + \sum\limits_{k \geqslant 1} \beta_k(t) e^{\pi k u} \cos \pi k v)}\, du \right) dv,$$

$$\beta_k(t) = \frac{2}{k}\Big( N_1(t) + \sum_{j=1}^{m} \frac{N_{j+1}(t) - N_j(t)}{\pi} \cos k\pi\sigma_j \Big),$$

*а элементы матриц* $Q = (q_{kj})_{1 \leqslant k,j \leqslant m}$, $P^0 = (p_k^0)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ *и* $P^1 = (p_k^1)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ *имеют вид*

$$q_{kj} = \frac{1}{\pi}\left[ \operatorname{tg}\frac{N_k - N_{k-1}}{2} \int_0^{\sigma_{k-1}} \frac{\ln f_j(\eta)}{g(\mathbf{N},\eta)}\, d\eta + \operatorname{tg}\frac{N_{k+1} - N_k}{2} \int_0^{\sigma_k} \frac{\ln f_j(\eta)}{g(\mathbf{N},\eta)}\, d\eta \right] + \delta_{kj} \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N},\eta)},$$

$$\begin{aligned} p_k^0(\mathbf{N}) =& d_{k-1}(\mathbf{N}) \cos\frac{N_k - N_{k-1}}{2} - d_k(\mathbf{N}) \cos\frac{N_{k+1} - N_k}{2} \\ &+ (\delta_{k1} - 1)\ \operatorname{tg}\frac{N_k - N_{k-1}}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \left[ d_{j-1}(\mathbf{N}) \sin\frac{N_j - N_{j-1}}{2} + d_j(\mathbf{N}) \sin\frac{N_{j+1} - N_j}{2} \right] \\ &- \operatorname{tg}\frac{N_{k+1} - N_k}{2} \sum_{j=1}^{k} \left[ d_{j-1}(\mathbf{N}) \sin\frac{N_j - N_{j-1}}{2} + d_j(\mathbf{N}) \sin\frac{N_{j+1} - N_j}{2} \right], \end{aligned}$$

$$p_k^1(\mathbf{N}) = \operatorname{tg}\frac{N_k - N_{k-1}}{2} \int_0^{\sigma_{k-1}} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N},\eta)} + \operatorname{tg}\frac{N_{k+1} - N_k}{2} \int_0^{\sigma_k} \frac{d\eta}{g(\mathbf{N},\eta)},$$

*в которых* $\delta_{kj}$ *— символ Кронекера,*

$$f_j(\eta) = \left| \frac{\sin\frac{\pi}{2}(\eta + \sigma_{j-1})\, \sin\frac{\pi}{2}(\eta - \sigma_{j-1})}{\sin\frac{\pi}{2}(\eta + \sigma_j)\, \sin\frac{\pi}{2}(\eta - \sigma_j)} \right|, \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

$$f_{m+1}(\eta) = 2\left|\sin\frac{\pi}{2}(\eta+\sigma_m)\,\sin\frac{\pi}{2}(\eta-\sigma_m)\right|,$$

$$g(\mathbf{N},\eta) = 2\prod_{k=1}^{m+1} f_k(\eta)^{N_k/\pi} \qquad d_k(\mathbf{N}) = \frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} g(\mathbf{N},\eta)\,d\eta,$$

$$\lambda_k = \frac{\sigma_{k-1}+\sigma_k}{2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,\ \lambda_0 = -\lambda_1,\ \lambda_{m+1} = 1.$$

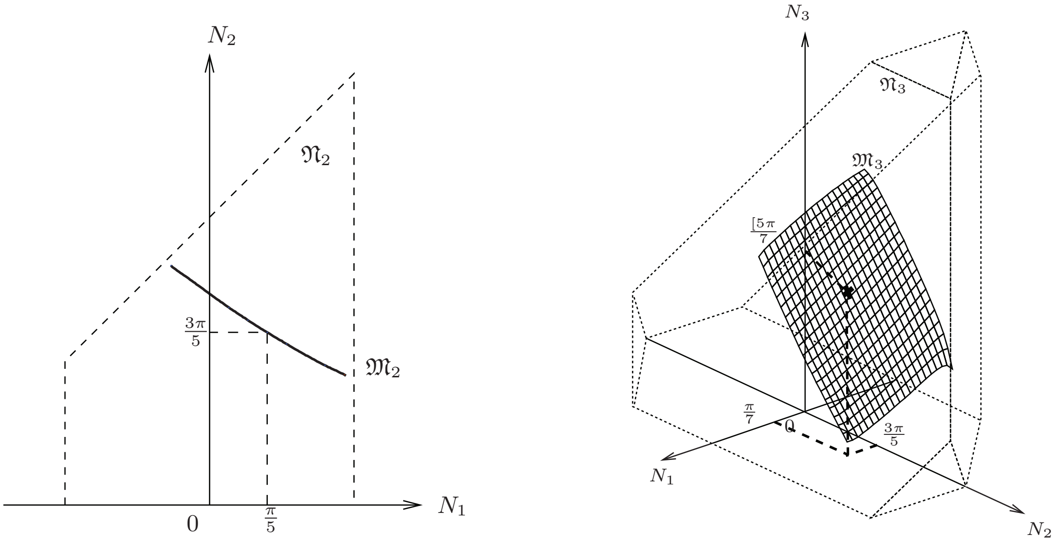



Рис. 3. Критические многообразия $\mathfrak{M}_2(\mathbf{N},\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$ и $\mathfrak{M}_3(\mathbf{N},\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$ в пространствах $\mathfrak{N}_2(\mathbf{N},\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$ и $\mathfrak{N}_3(\mathbf{N},\widehat{\boldsymbol{\sigma}})$ соответственно.

**2.2.** Численный анализ [**30**]–[**32**] показал, что в пространстве $\mathfrak{N}_m(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma})$ квазиконтуров $\Gamma_t^m$ имеется многообразие $\mathfrak{M}_m(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma}) = \{(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma}) \in \mathfrak{N}_m(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma}) \big| \det Q(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma}) = 0\}$ коразмерности 1, которое в [**32**] названо ***критическим***, поскольку оно связано с вырождением матрицы $Q(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma})$, соответствующей оператору $\mathbf{I}-\mathbf{K}(\beta)$, фигурирующему в формуле (1.11).

Представленные на рис. 4 и 5 результаты численных расчетов, включая графики $t \mapsto \det Q(t)$ и $t \mapsto \ln\rho(t)$, где $\rho$ — максимально возможное отношение расстояний двух точек квазиконтура от источника-стока, показывают, что правильные квазиконтуры $\Gamma_t^5 \in \mathfrak{M}_5(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma})$ и $\Gamma_t^7 \in \mathfrak{M}_7(\mathbf{N},\boldsymbol{\sigma})$, в центре которых расположен источник-сток, являются аттрактором в случае источника (и репеллером в случае стока). Такой же вывод в отношении окружности (являющейся правильным квазиконтуром с бесконечным числом сторон), в центре которой расположен источник-сток, дает теорема 1.2, проиллюстрированная на рис. 1.

Что касается эволюции малых возмущений других точек критического многообразия, то для тех точек $\mathfrak{M}_m(\mathbf{N},\sigma)$ (т.е. квазиконтуров), для которых были проведены численные эксперименты, оказалось, что они, напротив, являются аттракторами в случае стока (и тем самым репеллерами в случае источника). В частности, на рис. 6 и 7 представлены подтверждающие этот факт результаты, а именно, данные об эволюции в случае стока децентрированной “окружности” (т.е. правильного децентрированного квазиконтура $\Gamma_t^8$). Заметим, что представленные на этих рисунках данные об эволюции в случае стока децентрированной “окружности” полностью соответствуют упомянутому в начале статьи результату [**6**].

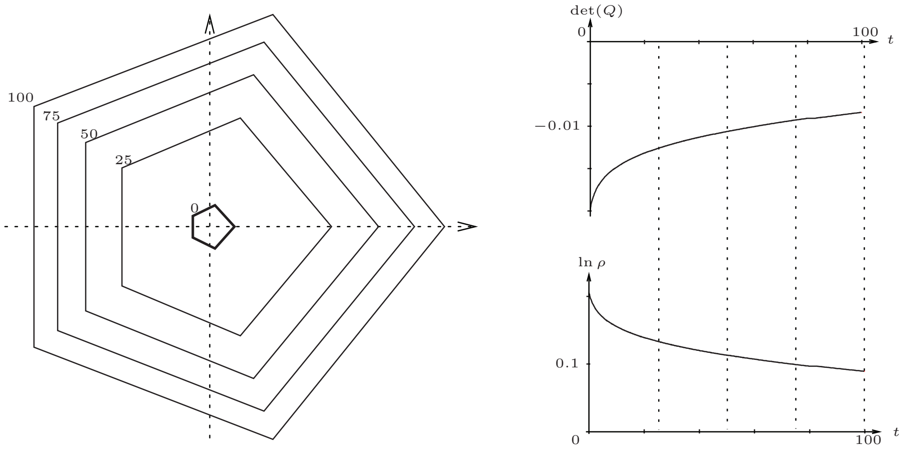



Рис. 4. Эволюция в правильный квазиконтур $\Gamma_t^5$ с центрированным источником слабо возмущенного квазиконтура, для которого $0 < N_1^0 - \pi/5 \ll 1, 0 < N_2^0 - 3\pi/5 \ll 1, \det Q(\mathbf{N}^0) < 0$.

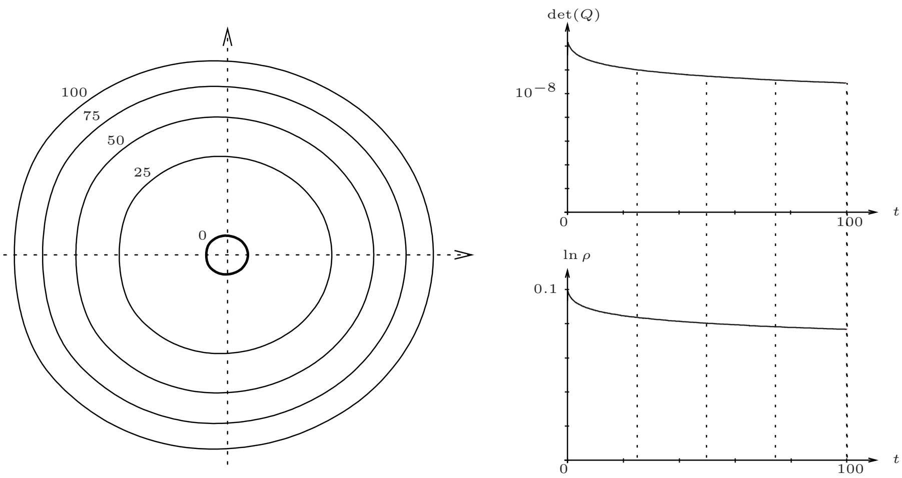



Рис. 5. Эволюция в (сплайн-интерполяционный) правильный квазиконтур $\Gamma_t^7$ с центрированным источником слабо возмущенного квазиконтура.

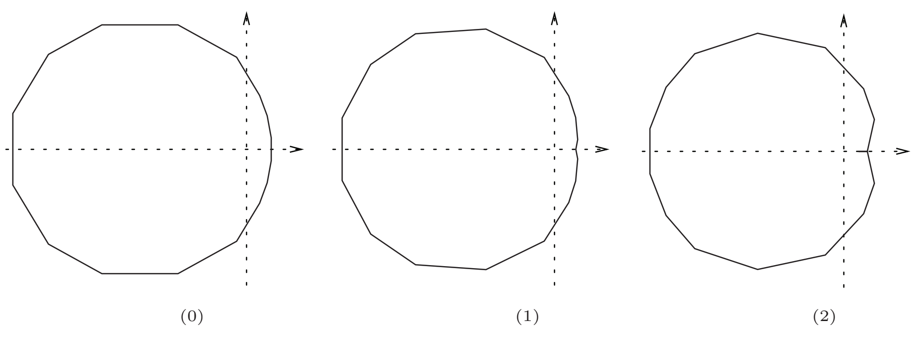
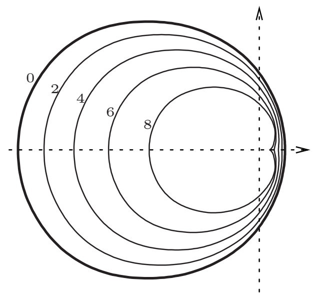



Рис. 6. Три стадии эволюции в случае стока децентрированной "окружности" Куфарева (децентрированного квазиконтура $\Gamma_t^8$).



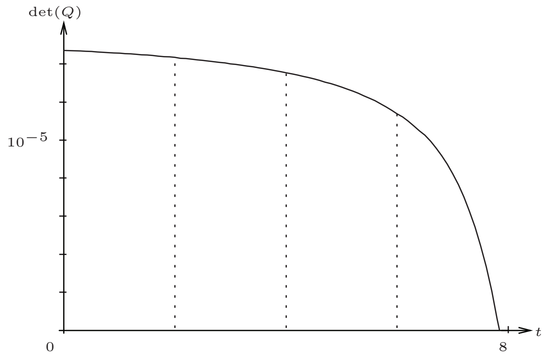




Рис. 7. Эволюция в случае стока децентрированной “окружности” Куфарева (децентрированного сплайн-интерполяционного квазиконтура $\Gamma_t^8$.

## Литература


1. G. G. Stokes, “Mathematical proof of the identily of the stream lines obtained by means of viscous film with those of a perfect fluid moving in two dimensions”, *Brit. Ass. Rep.* 143–144 (1898).
2. Л. С. Лейбензон, *Нефтепромысловая механика. II*, Нефтеиздат, М. (1934).
3. Л. А. Галин, “Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью”, *Докл. АН СССР* **47**, No. 4, 250–253 (1945).
4. П. Я. Полубаринова-Кочина, “К вопросу о перемещении контура нефтеносности”, *Докл. АН СССР* **47**, No. 4, 254–257 (1945).
5. П. Я. Полубаринова-Кочина, “О неустановившихся движениях в теории фильтрации: О перемещении контура нефтеносности”, *Прикл. мат. мех.* **9**, No. . 1, 79–90 (1945).
6. П. П. Куфарев, “Решение задачи о контуре нефтеносности для круга”, *Докл. АН СССР* **60**, No. 8, 1333–1334 (1948).
7. S. Richardson, “Hele–Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel”, *J. Fluid Mech.* **56**, 609–618 (1972).
8. Ю. П. Виноградов, П. П. Куфарев, “Об одной задаче фильтрации”, *Прикл. мат. мех.* **12**, No. 2, 181–198 (1948).
9. П. Я. Кочина /П.Я. Полубаринова-Кочина/, *Избранные труды. Гидродинамика и теория фильтрации*, Наука, М. (1991).
10. Дж. Р. Окендон, С. Д. Ховисон, “Кочина и Хеле-Шоу в современной математике, естественных науках и технике”, *Прикл. мат. мех.* **66**, No. 3, 515–524 (2002).
11. B. Gustafsson, “Applications of variational inequalities to a moving boundary problem for Hele-Shaw flows”, *SIAM J. Math. Anal.* **16**, 279–300 (1985).
12. B. Gustafsson, A. Vasil’ev, *Conformal and Potential Analysis in Hele–Shaw cells*, Birkäuser, Basel (2006).
13. S. D. Howison, J. R. Ockendon, “Papers from the conference held in Oxford”, *Euro. J. Appl. Math.* **10**, 511–709 (1999).
14. A. M. Meirmanov, B. Zaltzman, “Global in time solution to the Hele-Shaw problem with a change of topology”, *Euro. J. Appl. Math.* **13**, 431–447 (2002).
15. Л. Н. Александров, *Кинетика кристализации и перекристализации полупроводниковых пленок*, Наука, Новосибирск (1985).
16. Е. Н. Каблов, *Литые лопатки газотурбинных двигателей*, МИСИС, М. (2001).
17. B. G. Thomas, Ch. Beckermann, *Modeling of Casting, Welding Advanced Solidification Processes*, San Diego, California (1998).
18. П. И. Плотников, В. Н. Старовойтов, “Задача Стефана, как предел системы фазового поля”, *Дифференц. уравнения* **29**, No. 3, 461–471 (1993).

19. G. Caginalp, "Stefan and Hele–Shaw type problems as asymptotics limits of the phase field equations", *Phys. Rev. A (3)* **39**, No. 11, 5887–5896 (1989).
20. G. Caginalp, X. Chen, "Convergence of the phase field model to its sharp interface limits", *Euro. J. Appl. Math.* **12**, 20–42 (2000).
21. В. Г. Данилов, Г. А. Омельянов, Е. В. Радкевич, "Асимптотическое решение системы фазового поля и модефицированная задача Стефана", *Дифференц. уравнения* **31**, No. 3, 483–491 (1995).
22. J. Escher, G. Simonett, "Classical solutions of multidimensional Hele-Shaw models", *SIAM J. Math. Anal.* **28**, No. 5, 1028–1047 (1997).
23. G. Prokert, "On evalution equations for moving domains," *Z. Anal. Anwend.* **18**, No. 1, 67–95 (1999).
24. A. S. Demidov, "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций", *Успехи мат. наук* **65** (1), 3–96 (2010).
25. А. С. Демидов, "Эволюция возмущения окружности в задаче Стокса– Лейбензона для течения Хил–Шоу," *Соврем. мат. прилож.* **2**, 3–24 (2003).
26. А. С. Демидов, "Эволюция возмущения окружности в задаче Стокса– Лейбензона для потока ечения Хил–Шоу. Часть II," *Соврем. мат. прилож.* **24**, 51–65 (2005).
27. А. С. Демидов, "Об эволюции слабого возмущения окружности в задаче о течении Хил-Шоу." *Успехи мат. наук* **57**, No. 6, 177–178 (2002).
28. В. И. Арнольд, *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИРТ, Ижевск (2000).
29. A. Antontsev, A. M. Meirmanov, V. Yurinsky, *Hele–Shaw Flow in Two Dimensions: Global-in-Time Classical Solutions*, Preprint No. 6, Universidade da Beira Interior, Portugal (1999).
30. A. S. Demidov, J.-P. Lohéac, textitA Quasicontour Model of Stokes–Leibenson Problem for Hele-Shaw Flows, Preprint No. 328, CNRS UMR 5585 (2001).
31. A. S. Demidov, J.-P. Lohéac, "On the evolution near some attractive manifold in a problem for the Hele-Shaw flows", In: *Abstracts of International Conference "Mathematical Ideas of P. L. Chebyshev and their Application for Modern Problems of Natural Sciences" (Obninsk, Russia, May 2002, 14-18)*, pp. 37-38 (2002).
32. A. S. Demidov, J.-P. Lohéac, 'The Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flows," In: *Patterns and Waves. Papers from the Conference on Patterns and Waves: Theory and Applications, St. Petersburg, Russia, July 8–13, 2002*, pp. 103–124, AkademPrint, St. Petersburg (2003). '
33. О. А. Васильева, А. С. Демидов, "Конечноточечная модель задачи Стокса–Лейбензона для Хил-Шоу течения", *Фундам. прикл. мат.* **5**, No. 5, 67–84 (1999).
34. А. С. Демидов, "Полигональная модель для течения Хил-Шоу", *Успехи мат. наук* **53**, No. 4, 195–196 (1998).
35. П. Я. Кочина, А. Р. Шкирич, "К вопросу о перемещении контура нефтеносности (эксперимент)", *Изв. АН СССР, отд. техн. наук*, No. 11, 105–107 (1954).
36. P. G. Saffman, G. I. Taylor, "The penetration of a fluid into a porous medium of Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid", *Proc. Royal Soc. A* **245**, 312–329 (1958).


Статья поступила в редакцию 11 декабря 2012 г.